

Institute of Oceanography Gdańsk University

**Jan Jędrasik**

**Opis modelu hydrodynamicznego**

# Model hydrodynamiczny

- Oparty na Princeton Ocean Model (Blumberg and Mellor 1987)
- Procesy mieszania pionowego są parametryzowane przez schemat drugiego rzędu turbulencji zamkniętej (Mellor and Yamada 1982)
- Model został zaadoptowany do warunków Morza Bałtyckiego (Kowalewski 1997)

# Opis modelu hydrodynamicznego

## Równania i warunki brzegowe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_M \frac{\partial u}{\partial z} \right) + A_M \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_M \frac{\partial v}{\partial z} \right) + A_M \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$p(x, y, z, t) = p_{\text{atm}} + g\rho_0 \eta + g \int_z^0 \rho(x, y, z', t) dz'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_H \frac{\partial T}{\partial z} \right) + A_H \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \theta_T$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_H \frac{\partial S}{\partial z} \right) + A_H \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho = \rho(T, S, p) \quad A_M = A_C \Delta x \Delta y \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2}$$

$$\frac{\partial q^2}{\partial t} + u \frac{\partial q^2}{\partial x} + v \frac{\partial q^2}{\partial y} + w \frac{\partial q^2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_q \frac{\partial q^2}{\partial z} \right) +$$

$$+ E_1 K_M \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{E_1 g}{\rho_0} K_H \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{q^3}{B_1} \tilde{W} + A_M \left( \frac{\partial^2 q^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q^2}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial q^2}{\partial t} + u \frac{\partial q^2}{\partial x} + v \frac{\partial q^2}{\partial y} + w \frac{\partial q^2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_q \frac{\partial q^2}{\partial z} \right) +$$

$$+ 2K_M \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{2g}{\rho_0} K_H \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{2q^3}{B_1} \tilde{C} + A_M \left( \frac{\partial^2 q^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q^2}{\partial y^2} \right)$$

gdzie:  $u, v, w$ , składowe wektora prędkości;  $f$ , parametr Coriolis'a;  $\rho, \rho_0$ , gęstość wody *in situ* i odniesienia;

$g$ , przyspieszenie ziemskie;  $p$ , ciśnienie;  $K_M, A_M$ , współczynniki pionowej i poziomej wymiany pędu

gdzie:  $p_{\text{atm}}$ , ciśnienie atmosferyczne;  $\eta$ , wychylenie powierzchni swobodnej

gdzie:  $T$ , temperatura wody;  $S$ , zasolenie;  $K_H, A_H$ , współczynniki pionowej i poziomej wymiany masy;  $\theta_T$ , źródła ciepła

gdzie:  $A_C$ , współczynnik empiryczny;  $\Delta x, \Delta y$ , krok przestrzenny w kierunku  $x$  i  $y$ .

gdzie:  $q^2$ , turbulentna energia kinetyczna;  $\tilde{W}$ , turbulentna makroskala;  $K_q$ , współczynnik pionowej wymiany energii kinetycznej;  $\kappa$ , stała Karman'a;  $H$ , głębokość morza;  $B_1, E_1, E_2$ , stałe empiryczne.

na powierzchni swobodnej

$$z = \xi(x, y)$$

$$\rho_0 K_M \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_{0x}$$

$$\rho_0 K_M \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_{0y}$$

strumienie ciepła

$$\rho_0 K_H \frac{\partial T}{\partial z} = H_0$$

strumienie energii

$$q^2 = B_1^{2/3} U_{*0}^2$$

$$q^2 C = 0$$

warunek kinematyczny na powierzchni

$$w = u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

przy dnie  $z = H$

$$\rho_0 K_M \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_{bx}$$

$$\rho_0 K_M \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_{by}$$

które sparametryzowano jako

$$\tau_{bx} = \rho_0 C_D \sqrt{u_b^2 + v_b^2} u_b$$

$$\tau_{by} = \rho_0 C_D \sqrt{u_b^2 + v_b^2} v_b$$

Strumienie energii przy dnie

$$q^2 = B_1^{2/3} U_{*b}^2$$

$$q^2 C = 0$$

warunek kinematyczny przy dnie

$$w_b = -u_b \frac{\partial H}{\partial x} - v_b \frac{\partial H}{\partial y}$$

gdzie:  $\tau_{0x}$ ,  $\tau_{0y}$ , naprężenia styczne wiatru;  $H_0$ , atmosferyczny strumień ciepła;  $\tau_{bx}$ ,  $\tau_{by}$ , tarcie przydenne;  $C_D$ , współczynnik oporu ( $C_D=0.0025$ );  $u_{*b} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}}$  prędkość tarciova;  $u$ ,  $u_b$ ,  $v$ ,  $v_b$ ,  $w$ ,  $w_b$ , składowe prędkości przy powierzchni (bez indeksu) i przy dnie (z indeksem b).

na granicy bocznej (rzeka)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + u_n \frac{\partial \Gamma}{\partial n} = 0$$

warunki początkowe

$$u(x, y, z) = 0, v(x, y, z) = 0, w(x, y, z) = 0$$

$$T = T(x, y, z), S = S(x, y, z).$$

$$\xi(x, y) = 0$$

## Aplikacja modelu

kryterium rotacyjne

$$\Delta t < \frac{1}{2\Omega \sin \theta}$$

gdzie:  $\Omega$ , prędkość kątowna Ziemi;  $\theta$ , szerokość geograficzna

kryterium związane z dyfuzją horyzontalną

$$\Delta t < \frac{1}{4A_H} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1}$$

gdzie:  $A_H$ , współczynnik dyfuzji horyzontalnej

warunek Couranta-Fridrichsa-Levy

$$\Delta t < \frac{1}{C_t} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

gdzie:  $C_t = 2\sqrt{gH} + U_{\max}$ , prędkość fundamentalnej fali długiej,  $U_{\max}$ , maksymalna wartość prędkości prądu;  
 lub  $C_t = 2C_i + u_{\max}$ ,  $C_i$ , prędkość podstawowej fali wewnętrznej,  $u_{\max}$ , maksymalna prędkość adwekcyjna.

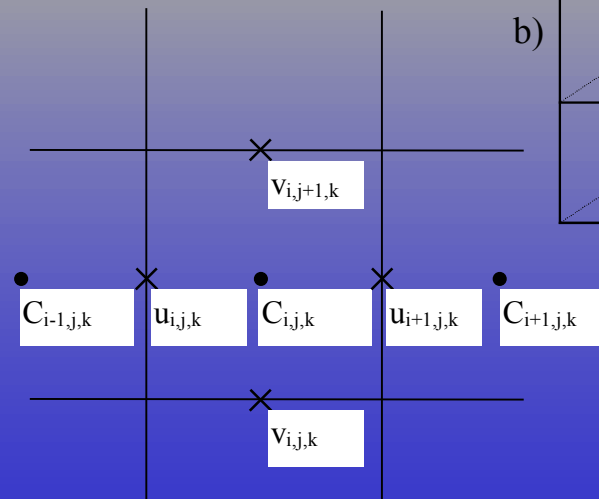
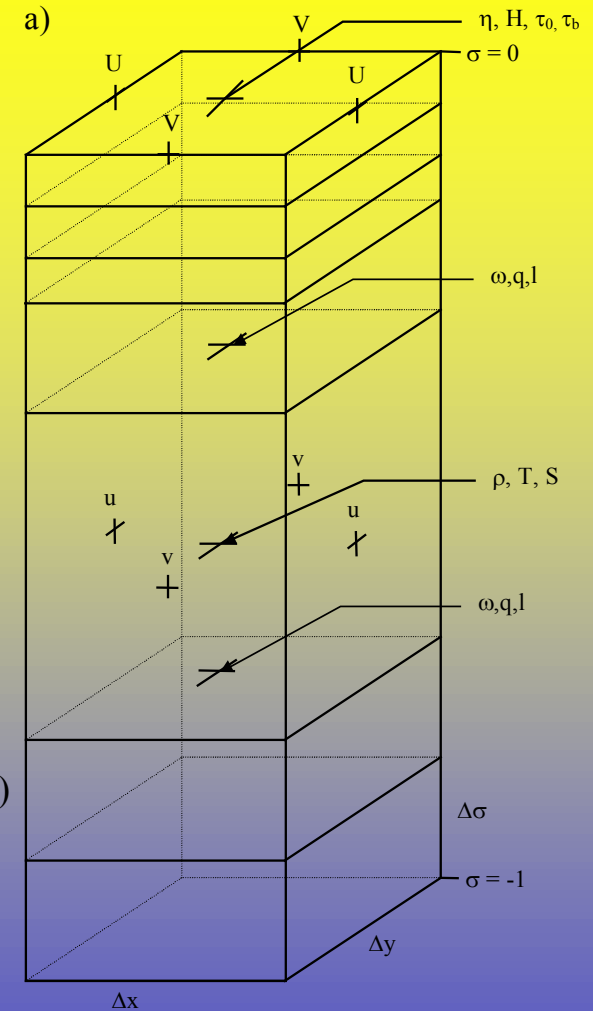
warunek wypromieniowania

$$V = \eta \sqrt{gH}$$

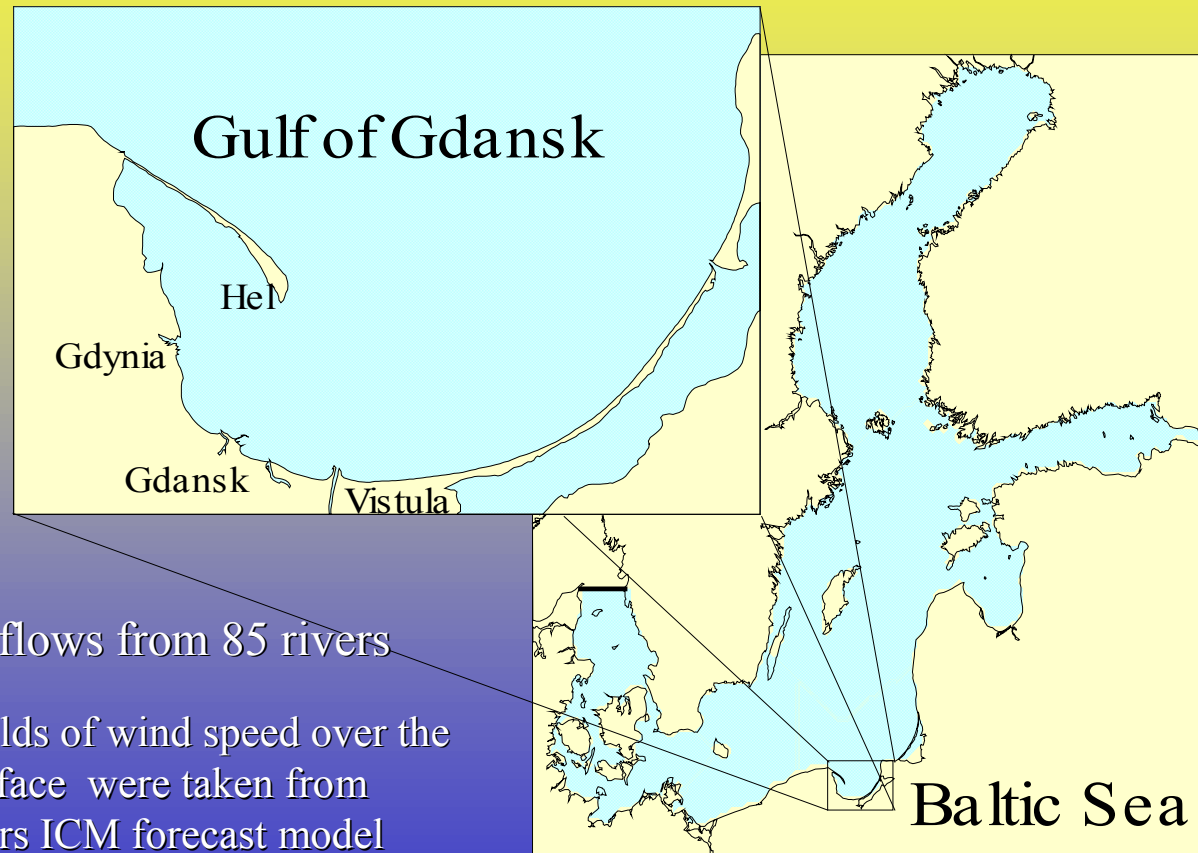
współrzędne układu sigma ( $x^*$ ,  $y^*$ ,  $\sigma$ ,  $t^*$ ),

$$x^* = x, \quad y^* = y, \quad t^* = t, \quad \sigma = \frac{z - \eta}{D}$$

gdzie:  $D = H + \eta$ , dla  $z = \eta$   $\sigma = 0$ ,  
 dla  $z = -H$   $\sigma = -1$



# The modelled areas



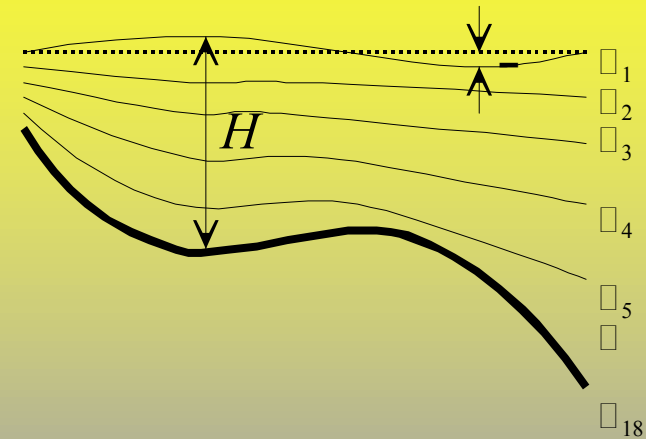
- The inflows from 85 rivers
- The fields of wind speed over the sea surface were taken from 48-hours ICM forecast model

# Numerical grids

## Vertical grid

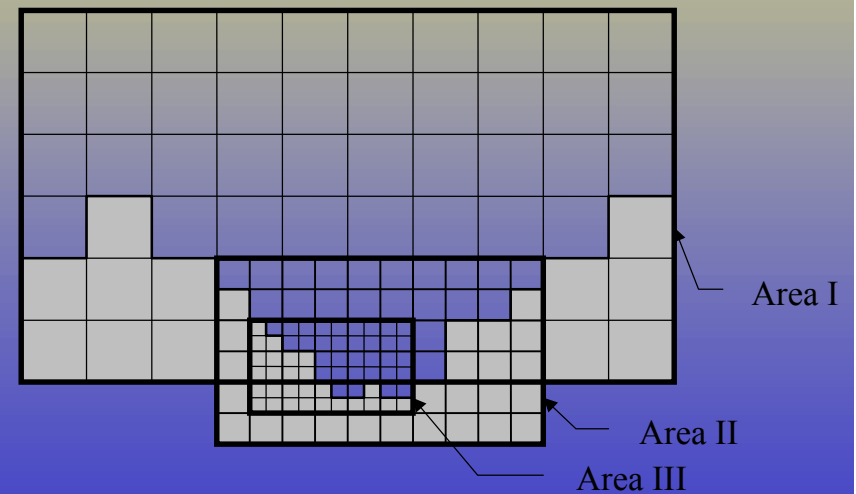
- based on  $\sigma$ -transformation defined as:

$$x^* = x, \quad y^* = y, \quad \sigma = \frac{z - \eta}{H + \eta}, \quad t^* = t$$



## Horizontal grid

- Model allows to define subareas with different grid density



# Temporal and spatial steps in the modelled areas

Step	The Baltic Sea	The Gulf of Gdańsk
$\Delta t$ - external mode (sea surface elevation)	1 min	20 s
$\Delta t$ - internal mode	20 min	4 min
$\Delta x$	10' longitude (ca. 5 NM)	2' longitude (ca. 1 NM)
$\Delta y$	5' latitude (5 NM)	1' latitude (1 NM)